第 6 讲　大数定律与中心极限定理

知识梳理

一　切比雪夫不等式

· 设随机变量 X 的数学期望和方差存在，分别记为 μ,σ^2，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

切比雪夫不等式

$$\boxed{P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

· 由于近十年只考过一次，所以没有收录进题型中

二　辛钦大数定律

1. **大数定律基本内容**

辛钦大数定律

$$\boxed{\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}E(X)\ (n\to\infty)}$$

· X_i 为独立同分布的随机变量序列，在下一讲会学到 $\overline{X}$ 为样本均值

2. **大数定律的推论**

辛钦大数定律推论 1

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i)\xrightarrow{P}E[h(X)]\ (n\to\infty)}$$

辛钦大数定律推论 2

$$\boxed{f(\overline{X})\xrightarrow{P}f[E(X)]}$$

三　中心极限定理

中心极限定理

$$\boxed{n\text{ 足够大时，}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)\quad\text{或}\quad\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})}$$

· X_i 为独立同分布的随机变量序列

· 推论：n 比较大的二项分布（可视为 n 个 0–1 分布变量之和）可以近似为正态分布

题型解析

十　求解依概率收敛

1.题型简述与解法

- 题干中出现“依概率收敛”或“$\xrightarrow{P}$”符号
- 首先求出所需的数学期望，然后代入辛钦大数定律（或两个推论）

2.历年考试典型例题

例 1　（19—20 **秋冬**）设随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}, & 0<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

对 X 独立重复观测 n 次，结果记为 $X_1,\cdots,X_n$.

（3）当 $n\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{-2}\mathrm{e}^{-X_i}$ 依概率收敛到何值?

解　· 求出 $E(X^{-2}\mathrm{e}^{-X})$

$$E(X^{-2}\mathrm{e}^{-X})=\int_0^3\frac{x^2}{9}\cdot x^{-2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{9}(1-\mathrm{e}^{-3})$$

· 代入辛钦大数定律

$$当 n\to+\infty 时，\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{-2}\mathrm{e}^{-X_i}\xrightarrow{P}E(X^{-2}\mathrm{e}^{-X})=\frac{1}{9}(1-\mathrm{e}^{-3})$$

例 2　（14—15 **春夏**）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛到________.

解　对于常见分布，应通过 $E(X)$ 和 $D(X)$ 反推 $E(X^2)$，因此 $E(X^2)=\mu^2+\sigma^2$

例 3　设总体 X 的分布律为 $P(X=-1)=\dfrac{\theta}{3}$，$P(X=0)=\dfrac{2\theta}{3}$，$P(X=1)=\dfrac{2(1-\theta)}{3}$，$P(X=2)=\dfrac{1-\theta}{3}$，未知参数 $\theta\in(0,1)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，当 $n\to+\infty$ 时，$(\overline{X}-\dfrac{4}{3})^2\xrightarrow{P}$__________.

解　$E(X)=\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{3}\theta$，根据大数定律的推论，$(\overline{X}-\dfrac{4}{3})^2\xrightarrow{P}[E(X)-\dfrac{4}{3}]^2=(\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{3}\theta-\dfrac{4}{3})^2=\dfrac{25}{9}\theta^2$

十一　求解近似分布

1.题型简述与解法

- 题干中出现“近似”或约等于符号，且含有一些比较大的数字
- 求出对应分布的期望和方差，代入中心极限定理后，用正态分布的性质求解

例 1　（16－27 **春夏**）设 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}0.5x, 0<x<2\\ 0,\quad 其他\end{cases}$

（3）若对 X 独立重复观察 72 次，结果记为 $X_1,\cdots,X_{72}$，求 $P(\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{72}X_i>\frac{25}{18})$ 的近似值.

解　$E(X)=\int_0^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$，$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^2\frac{1}{2}x^3\mathrm{d}x-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$

∴ 由中心极限定理，$\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{72}X_i\sim N(\frac{4}{3},\frac{1}{18^2})$

∴ $P(\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{72}X_i>\frac{25}{18})=P(\frac{\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{72}X_i-\frac{4}{3}}{1/18}>\frac{\frac{25}{18}-\frac{4}{3}}{1/18})=P(Z>1\frac{\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{72}X_i-\frac{4}{3}}{1/18}>1)\approx1-\Phi(1)\approx1.6$

例 2　（19－20 **春夏**）设随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, 0<x<1\\ \frac{2}{3},\ 1<x<2\\ 0,\quad 其他\end{cases}$$

对 X 独立重复观测 n 次，结果记为 $X_1,\cdots,X_n$.

（4）若 $n=450$，Z 表示 450 次观测中 $\{X_i<1\}$ 出现的次数，求 $P(Z>160)$ 的近似值.

解　注意这里并不是求 X 的近似概率，而是 Z 的

由题意，$P(X<1)=\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，因此 $Z\sim B(450,\frac{1}{3})$，则 $E(Z)=150$，$D(Z)=100$

因此 Z 可以近似为 $N(150,100)$

∴ $P(Z>160)=P(\frac{Z-150}{10}>\frac{160-150}{10})\approx1-\Phi(1)\approx0.16$